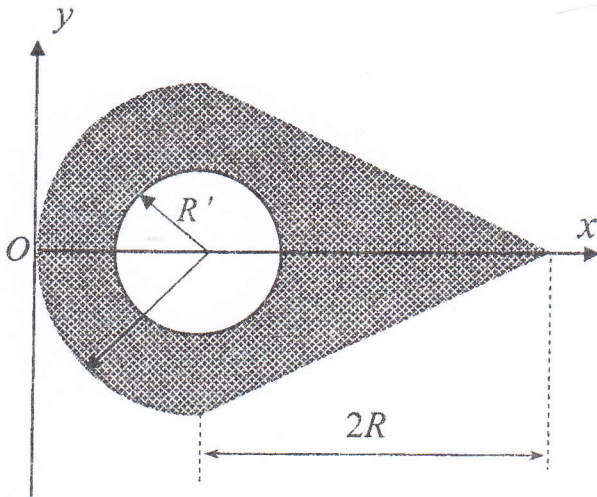


التمرين الأول: (7 نقاط)

أوجد موضع مركز الكتلة للوحة المتجانسة و ذات الأبعاد المبينة في الشكل المقابل.

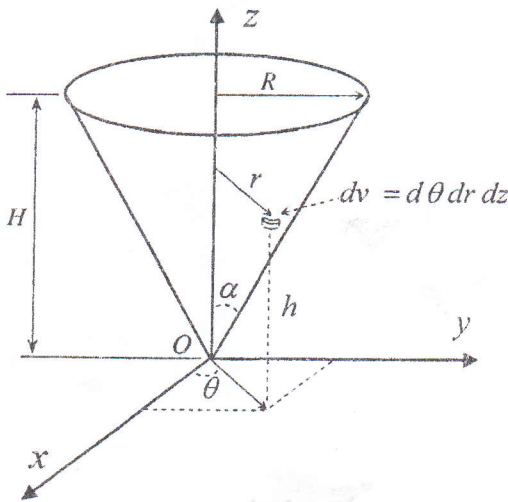


التمرين الثاني: (7 نقاط)

أوجد مصفوفة العطالة للمخروط المملوء المبين في الشكل المقابل.

ملاحظة: حجم المخروط هو:

$$V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} \pi R^2 H$$

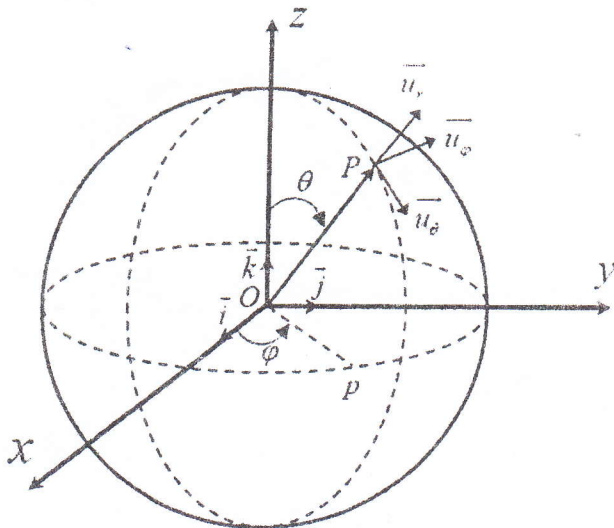


التمرين الثالث: (6 نقاط)

لتكن النقطة P المعرفة في المعلم الكارتيبي المتعامد و المتجانس $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، و لتكن الأشعة $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi$ هي أشعة الوحدة في المعلم الكروي.

1- أكتب الأشعة $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi$ في المعلم الكارتيبي.

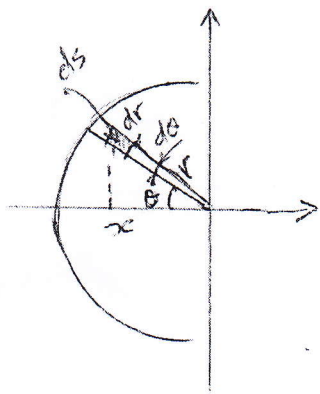
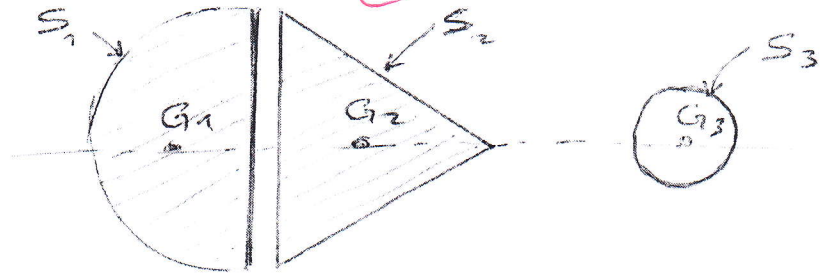
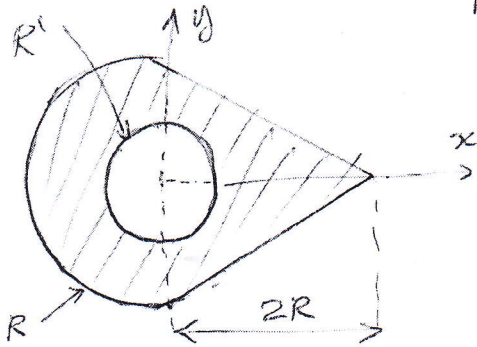
2- أكتب شعاع الموضع $\vec{OP}$ ، شعاع السرعة $\vec{v}$ و شعاع التسارع $\vec{a}$ في الإحداثيات الكروية.



حل التمرين الأول:

أولاً يجب تحليل الشكل إلى أشكال بسيطة، ثم حساب مركز العطالة لكل جزء على حدة، ثم حساب مركز العطالة الكلي حيث:

$$x_G = \frac{x_{G1} \cdot m_1 + x_{G2} \cdot m_2 + x_{G3} \cdot m_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$



(1) حساب مركز S_1 : 0,5

بسبب التناظر لدينا: $y_{G1} = 0$

$$x_{G1} = \frac{\int x dm}{\int dm} = \frac{\int x \cdot ds}{\int ds}$$

$$= \frac{-\int r \cdot \cos \theta \cdot r \cdot d\theta \cdot dr}{\int r \cdot d\theta \cdot dr}$$

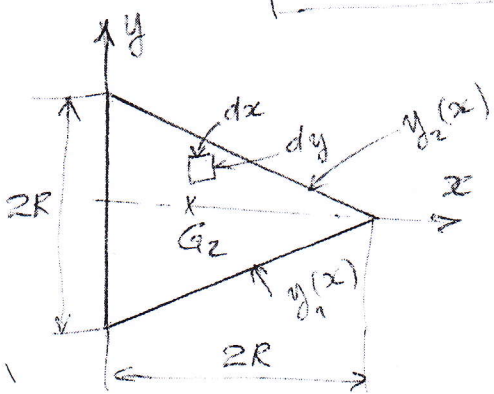
حيث:

$$ds = r \cdot d\theta \cdot dr$$

$$x = r \cdot \cos \theta$$

$$x_{G1} = \frac{-\int_0^R r^2 dr \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta \cdot d\theta}{\int_0^R r dr \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta} = \frac{\frac{R^3}{3} [\sin \theta]_{-\pi/2}^{\pi/2}}{R^2 \cdot \pi}$$

$$x_{G1} = -\frac{4R}{3\pi}$$



(2) حساب مركز S_2 : 0,5

$$x_{G2} = \frac{\int x ds}{\int ds} = \frac{\iint x dx dy}{\iint dx dy}$$

$$\iint x dx \cdot dy = \int_0^{2R} \left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} x dx \right] dy =$$

$$= \int_{-R}^R \left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} x dx \right] dy$$

$$y_1(x) = ax + b \quad \begin{cases} \rightarrow ax = 0 \Rightarrow y_1(0) = -R \rightarrow b = -R \\ \rightarrow ax = 2R \Rightarrow y_1(2R) = 0 \rightarrow a = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$y_2(x) = ax + b \quad \begin{cases} \rightarrow ax = 0 \Rightarrow y_2(0) = R \rightarrow b = R \\ \rightarrow ax = 2R \Rightarrow y_2(2R) = 0 \rightarrow a = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$y_1(x) = -R + \frac{1}{2}x$$

$$y_2(x) = +R - \frac{1}{2}x$$

$$\iint x \, dx \, dy = \int_0^{2R} \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} x \, dy \right] dx$$

$$= \int_0^{2R} x(2R - x) \, dx = 2R \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{2R} - \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{2R}$$

$$= 4R^3 - \frac{8}{3}R^3 = \frac{4}{3}R^3$$

$$\begin{aligned} (*) \iint dx \, dy &= \int_0^{2R} \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \right] dx = \int_0^{2R} (2R - x) \, dx \\ &= 2R(2R) - \frac{(2R)^2}{2} \\ &= 4R^2 - 2R^2 = 2R^2 \end{aligned}$$

$$x_{G_2} = \frac{\frac{4}{3}R^3}{2R^2} = \frac{2}{3}R$$

حساب مركز S_3 :

مركز الكتلة لـ S_3 موجود في مركز الدائرة أي مبدأ العالم

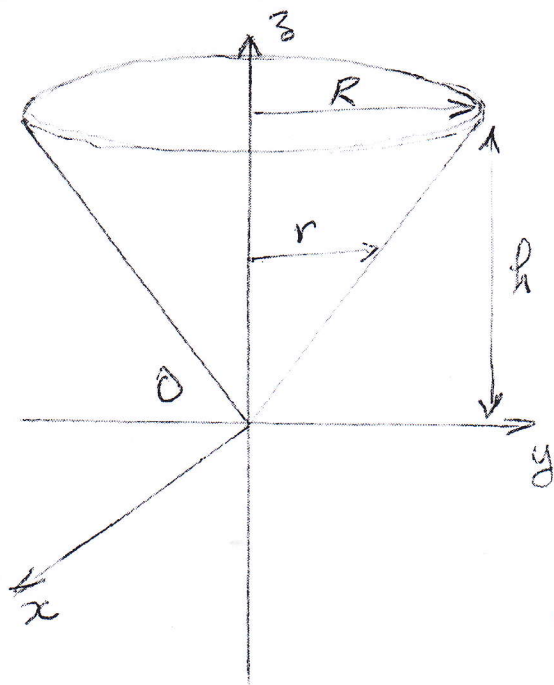
والتالي: $x_{G_3} = 0$

حساب x_G للصورة:

$$x_G = \frac{x_{G_1}S_1 + x_{G_2}S_2 - x_{G_3}S_3}{S_1 + S_2 + S_3}$$

$$x = \frac{-\frac{4R}{3\pi} - \frac{\pi R^2}{2} + \frac{2}{3}R \cdot 2R^2}{\pi R^2 + 2R^2 - \pi R^2} = \frac{4R}{2(1 - \pi + 4)} = \frac{4R^3}{3(4R^2 - \pi R^2)}$$

حل التمرين الثاني:



- بما أن المحاور متناظر بالنسبة للمحور z
فإن كل x توافقها x - وكل y توافقها y

عندئذ: $I_{xy} = I_{yz} = I_{xz} = 0$

- حساب I_{zz}

$$I_{zz} = \int (x^2 + y^2) dm$$

$$= \int r^2 \cdot 2\pi r dr dz$$

$$= 2\pi \int dz \int r^3 dr$$

$dm = \rho \cdot 2\pi r dr dz$
 $\frac{R}{h} = \frac{r}{z} \Rightarrow r = \frac{Rz}{h}$

$$I_{zz} = \rho \cdot 2\pi \int_0^h dz \cdot \frac{r^4}{4} \Big|_0^{\frac{Rz}{h}} = \rho \cdot 2\pi \int_0^h dz \left(\frac{Rz}{h} \right)^4$$

$$= \rho \cdot \frac{2\pi}{4} \cdot \frac{R^4}{h^4} \int_0^h z^4 dz = \rho \cdot \frac{2\pi}{4} \cdot \frac{R^4}{h^4} \cdot \frac{h^5}{5} = \boxed{\frac{\pi \rho R^4 h}{10}}$$

$$I_{xx} + I_{yy} = 2 I_{zz}$$

$$I_{xx} = I_{yy}$$

$$I_{xx} + I_{yy} = \int (y^2 + z^2) dm + \int (x^2 + z^2) dm$$

$$= I_{zz} + 2 \int z^2 dm$$

$$\Rightarrow \int z^2 dm = \int z^2 \cdot 2\pi \rho r dr dz = \rho \cdot 2\pi \int_0^h z^2 dz \int_0^{\frac{Rz}{h}} r dr$$

$$= 2\pi \rho \int_0^h z^2 dz \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{\frac{Rz}{h}}$$

$$= \pi \rho \int_0^h z^2 \cdot \frac{R^2 z^2}{h^2} dz = \frac{\pi \rho R^2}{h^2} \int_0^h z^4 dz$$

$$= \left[\pi \rho \frac{R^2}{h^2} \frac{h^5}{5} \right]$$

$$2 I_{xx} = \frac{2\pi \rho R^2 h^3}{5} + I_{zz}$$

$$I_{xx} = \frac{\pi \rho R^2 h^3}{5} + \frac{\pi \rho R^4 h}{20} = \pi \rho R^2 h \left(\frac{h}{5} + \frac{R^2}{20} \right)$$

$$m \left(\frac{3}{5} h^2 + \frac{3}{20} R^2 \right)$$

$$m_{ec} = \rho \cdot V_{ec}$$

$$V_{ec} = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

حل التمرين الثالث:

(1) كتابة أشعة الوحدة في المعلم الكاريزي:

$$\vec{u}_r = \sin\theta \cos\varphi \vec{i} + \sin\theta \sin\varphi \vec{j} + \cos\theta \vec{k}$$

$$\vec{u}_\theta = \cos\theta \cos\varphi \vec{i} + \cos\theta \sin\varphi \vec{j} - \sin\theta \vec{k}$$

$$\vec{u}_\varphi = -\sin\varphi \vec{i} + \cos\varphi \vec{j}$$

(2) 1- شعاع الموضع:

$$\vec{OP} = OP \cdot \vec{u}_r = r \cdot \vec{u}_r$$

2- شعاع السرعة:

$$\begin{aligned} \vec{V} &= \frac{d\vec{OP}}{dt} = \dot{r} \vec{u}_r + r \frac{d\vec{u}_r}{dt} \\ &= \dot{r} \vec{u}_r + r \left(\frac{d\vec{u}_r}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} + \frac{d\vec{u}_r}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} (\cos\theta \cos\varphi \vec{i} + \cos\theta \sin\varphi \vec{j} - \sin\theta \vec{k}) \\ &\quad + r \dot{\varphi} (-\sin\theta \sin\varphi \vec{i} + \sin\theta \cos\varphi \vec{j}) \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{V} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta + r \dot{\varphi} \sin\theta \vec{u}_\varphi}$$

3- شعاع التسارع:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d(\dot{r} \vec{u}_r)}{dt} + \frac{d(r \dot{\theta} \vec{u}_\theta)}{dt} + \frac{d(r \dot{\varphi} \sin\theta \vec{u}_\varphi)}{dt}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \ddot{r} \vec{u}_r + \dot{r} \frac{d\vec{u}_r}{dt} + \dot{r} \dot{\theta} \vec{u}_\theta + r \ddot{\theta} \vec{u}_\theta + r \dot{\theta} \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} + \dot{r} \sin\theta \dot{\varphi} \\ &\quad + r \cos\theta \dot{\theta} \dot{\varphi} \vec{u}_\varphi + r \sin\theta \ddot{\varphi} \vec{u}_\varphi + r \sin\theta \dot{\varphi} \frac{d\vec{u}_\varphi}{dt} \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta \dot{\varphi}^2) \vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\sin\theta \cos\theta \dot{\varphi}^2) \\ &\quad + (2\dot{r}\sin\theta \dot{\varphi} + 2r\cos\theta \dot{\theta} \dot{\varphi} + r\sin\theta \ddot{\varphi}) \vec{u}_\varphi \end{aligned}}$$